3. $\forall x\ (P(x)\ \to \exists y\ R(x, f(y)))\ \to\ (\exists x\ \neg P(x)\ \vee\ \forall x \exists z\ R(x,z))$

$$T_\phi = \langle \emptyset \mid \forall x\ (P(x)\ \to \exists y\ R(x, f(y)))\ \to\ (\exists x\ \neg P(x)\ \vee\ \forall x \exists z\ R(x,z))\rangle$$

$$\Big\downarrow R\to$$

$$T_1 = \langle \forall x\ (P(x)\ \to\ \exists y\ R(x, f(y))) \mid \exists x\ \neg P(x)\ \vee\ \forall x \exists z\ R(x,z)\rangle$$

$$\Big\downarrow R\vee$$

$$T_2 = \langle \forall x\ (P(x)\ \to\ \exists y\ R(x, f(y))) \mid \exists x\ \neg P(x),\ \forall x \exists z\ R(x,z)\rangle$$

$$\Big\downarrow R\forall$$

$$T_3 = \langle \forall x\ (P(x)\ \to\ \exists y\ R(x, f(y))) \mid \exists x\ \neg P(x),\ \exists z\ R(c_1,z)\rangle$$

$$\Big\downarrow L\forall$$

$$T_4 = \left\langle \overbrace{\forall x\ (P(x)\ \to\ \exists y\ R(x, f(y)))}^{\phi_1},\ P(c_1)\ \to\ \exists y\ R(c_1, f(y)) \mid \exists x\ \neg P(x),\ \exists z\ R(c_1,z)\right\rangle$$

$$L\to \Big\downarrow \qquad\qquad \Big\downarrow L\to$$

$$T_{4.1} = \langle \phi_1,\ \exists y\ R(c_1, f(y)) \mid \exists x\ \neg P(x),\ \exists z\ R(c_1,z)\rangle \qquad T_{4.2} = \langle \phi_1,\ \mid \exists x\ \neg P(x),\ \exists z\ R(c_1,z),\ P(c_1)\rangle$$

$$L\exists \Big\downarrow \qquad\qquad \Big\downarrow R\exists$$

$$T_{5.1} = \langle \phi_1,\ R(c_1, f(c_2)) \mid \exists x\ \neg P(x),\ \exists z\ R(c_1,z)\rangle \qquad T_{5.2} = \langle \phi_1,\ \mid \exists x\ \neg P(x),\ \exists z\ R(c_1,z),\ P(c_1),\ \neg P(c_1)\rangle$$

$$R\exists \Big\downarrow \qquad\qquad \Big\downarrow R/$$

$$T_{5.1} = \left\langle \phi_1,\ \underline{R(c_1, f(c_2))} \mid \exists x\ \neg P(x),\ \exists z\ R(c_1,z), \underline{R(c_1, f(c_2))}\right\rangle \qquad T_{5.2} = \left\langle \phi_1,\ \underline{P(c_1)} \mid \exists x\ \neg P(x),\ \exists z\ R(c_1,z),\ \underline{P(c_1)}\right\rangle$$

Закрытые таблицы

Здесь A, B — формулы логики предикатов,
$\Gamma,\ \Delta$ — множества формул логики предикатов,
x — предметная переменная, c — константа,
t — терм.

Таблица закрыта, если
$\langle \Gamma \mid \Delta \rangle, \Gamma \cap \Delta \neq \emptyset$

L¬ $\dfrac{\langle \neg \mathrm{A},\ \Gamma \mid \Delta\rangle}{\langle \Gamma \mid \mathrm{A},\ \Delta\rangle}$

R¬ $\dfrac{\langle \Gamma \mid \neg \mathrm{A},\ \Delta\rangle}{\langle \mathrm{A},\ \Gamma \mid \Delta\rangle}$

L& $\dfrac{\langle \mathrm{A}\&\mathrm{B},\ \Gamma \mid \Delta\rangle}{\langle \mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \Gamma \mid \Delta\rangle}$

R& $\dfrac{\langle \Gamma \mid \mathrm{A}\&\mathrm{B},\ \Delta\rangle}{\langle \Gamma \mid \mathrm{A},\ \Delta\rangle;\ \langle \Gamma \mid \mathrm{B},\ \Delta\rangle}$

L∨ $\dfrac{\langle \mathrm{A}\vee\mathrm{B},\ \Gamma \mid \Delta\rangle}{\langle \mathrm{A},\ \Gamma \mid \Delta\rangle;\ \langle\ \mathrm{B}, \Gamma \mid \Delta\rangle}$

R∨ $\dfrac{\langle \Gamma \mid \mathrm{A}\vee\mathrm{B},\ \Delta\rangle}{\langle \Gamma \mid \mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \Delta\rangle}$

L → $\dfrac{\langle \mathrm{A}\to\mathrm{B},\ \Gamma \mid \Delta\rangle}{\langle \mathrm{B},\ \Gamma \mid \Delta\rangle;\ \langle \Gamma \mid \mathrm{A},\ \Delta\rangle}$

R → $\dfrac{\langle \Gamma \mid \mathrm{A}\to\mathrm{B},\ \Delta\rangle}{\langle \mathrm{A},\ \Gamma \mid \mathrm{B},\ \Delta\rangle}$

L∀ $\dfrac{\langle \forall \mathrm{x}\ \mathrm{A},\ \Gamma \mid \Delta\rangle}{\langle \mathrm{A}\{\mathrm{x}/\mathrm{t}\},\ \forall \mathrm{x}\ \mathrm{A},\ \Gamma \mid \Delta\rangle}$

где переменная x свободна
в формуле A для терма t

R∀ $\dfrac{\langle \Gamma \mid \forall \mathrm{x}\ \mathrm{A},\ \Delta\rangle}{\langle \Gamma \mid \mathrm{A}\{\mathrm{x}/\mathrm{c}\},\ \Delta\rangle}$

где константа c не содержится
в формуле A, а также в
формулах множеств Γ и Δ

L∃ $\dfrac{\langle \exists \mathrm{x}\ \mathrm{A},\ \Gamma \mid \Delta\rangle}{\langle \mathrm{A}\{\mathrm{x}/\mathrm{c}\},\ \Gamma \mid \Delta\rangle}$

где константа c не содержится
в формуле A, а также в
формулах множеств Γ и Δ

R∃ $\dfrac{\langle \Gamma \mid \exists \mathrm{x}\ \mathrm{A},\ \Delta\rangle}{\langle \Gamma \mid \mathrm{A}\{\mathrm{x}/\mathrm{t}\},\ \exists \mathrm{x}\ \mathrm{A},\ \Delta\rangle}$

где переменная x свободна
в формуле A для терма t

3 Нормальные формы и унификация

3.1 Преведение к ССФ

1. Переименование переменных
   $\models\ \substack{\exists\\\forall}\ x\ F(x)\ \equiv\ \substack{\exists\\\forall}\ y\ F(y)$
2. Уничтожение импликаций $\models\ (A\ \rightarrow\ B)\ \equiv\ (\neg A\ \vee\ B)$
3. Отрицания
   (a) $\models\ \neg(A \substack{\&\\\vee} B)\ \equiv\ (\neg A \substack{\vee\\\&} \neg B)$
   (b) $\models\ (\neg \substack{\exists\\\forall} x F(x)) \equiv (\substack{\forall\\\exists} x \neg F(x)$
   (c) $\models\ \neg\neg A\ \equiv\ A$
4. Вынос кванторов
   $\models\ \substack{\exists\\\forall} x F(x)\ \substack{\&\\\vee}\ B\ \equiv\ \substack{\exists\\\forall} x (F(x)\ \substack{\&\\\vee}\ B)$
5. $\models\ A \& B\ \vee\ C\ \equiv (A \vee C)\ \&\ (B \vee C)$

3.2 Нахождение НОУ

$$P(t_1,t_2,\dots t_n)\ =\ P(s_1,s_2,\dots s_n)\ \rightarrow\ \begin{cases} t_1 = s_1\\ t_2 = s_2\\ \dots\dots\dots\dots\\ t_n = s_n \end{cases}$$

1. $\{\ f(t_1,t_2,\dots t_n)\ =\ f(s_1,s_2,\dots s_n)\ \rightarrow\ \begin{cases} t_1 = s_1\\ t_2 = s_2\\ \dots\dots\dots\dots\\ t_n = s_n \end{cases}$
2. $\{\ f(t_1,t_2,\dots t_n)\ =\ f(s_1,s_2,\dots s_k)\ \rightarrow$ НОУ не существует
3. $t_i = x_i\ \rightarrow\ x_1 = t_i\ \ (t_i \neq x_i)$
4. $t_i = t_i\ \rightarrow\ \emptyset$
5. $x_i = t_i\ \ (x_i \notin Var_{t_i},\ \exists k\ x_i \in Var_{t_k})\ \rightarrow$ Во все t_k подствить вместо x_i t_i
6. $x_i = t_i\ \ (x_i \in Var_{t_i})\ \rightarrow$ НОУ не существует

// можно: X/c, X/f(c), X1/f(X2), f(X1, X2, X3) = f(Y1, Y2, Y3)
// нельзя: c/X, c1/c2, X1 = f(X1), f(X1, X2, X3) = f(Y1, Y2)

4 Метод резолюций

Упражнение 4.1

1. $\neg P(f(x,y),z,h(z,y))\ \vee\ R(z,v),\ Q(x)\ \vee\ P(f(y,x),g(y),v)$

$D_1 = \neg P(f(x,y),z,h(z,y))\ \vee\ R(z,v)$

$D_2 = Q(x)\ \vee\ P(f(y,x),g(y),v)$

НОУ$(P(f(y,x),g(y),v), \neg P(f(x,y),z,h(z,y)))$

$$\begin{cases} f(y,x) = f(x,y)\\ g(y) = z\\ v = = h(z,y)\end{cases} \xrightarrow{3} \begin{cases} f(y,x) = f(x,y)\\ z = g(y)\\ v = = h(z,y)\end{cases} \xrightarrow{1}$$

$$\begin{cases} y = x\\ x = y\\ z = g(y)\\ v = = h(z,y)\end{cases} \xrightarrow{5} \begin{cases} y = x\\ x = x\\ z = g(x)\\ v = = h(z,x)\end{cases} \xrightarrow{4}$$

$$\begin{cases} y = x\\ z = g(x)\\ v = = h(z,x)\end{cases} \xrightarrow{5} \begin{cases} y = x\\ z = g(x)\\ v = = h(g(x),x)\end{cases}$$

$\Theta = \{y/x, z/g(x), v/h(g(x),x)\}$

$D_3\ \ \underset{\Theta}{\overset{D_1,D_2}{=}}\ \ R(g(x),h(g(x),x))\ \vee\ Q(x)$

Упражнение 4.2

1. $S = \{D_1,D_2,D_3,D_4,D_5\}$

$D_1 = P(X_1, f(X_1))$
$D_2 = R(Y_2,Z_2)\ \vee\ \neg P(Y_2, f(a))$
$D_3 = \vee R(c, X_3)$
$D_4 = R(X_4,Y_4)\ \vee\ R(Z_4, f(Z_4))\ \vee\ \neg P(Z_4,Y_4)$
$D_5 = P(X_5,X_5)$

$D_6\ \ \underset{\{X_1/a, Y_2/a\}}{\overset{D_1,D_2}{=}}\ \ R(a,Z_6)$

$D_7\ \ \underset{\{X_4/Z_4, Y_4/f(Z_4)\}}{\overset{D_4}{=}}\ \ R(Z_7, f(Z_7))\ \vee\ \neg P(Z_7, f(Z_7))$

$D_8\ \ \underset{\{X_3/f(c), Z_7/c\}}{\overset{D_7,D_3}{=}}\ \ \neg P(c, f(c))$

$D_9\ \ \underset{\{X_1/c\}}{\overset{D_1,D_8}{=}}\ \ \square$

Упражнение 4.3

1. $\exists x\ P(x)\ \rightarrow\ \neg\forall x\ \neg P(x)$

$\phi_0 = \neg(\exists x\ P(x)\ \rightarrow\ \neg\forall y\ \neg P(x))$
$\phi_{01} = \exists x\ P(x)\ \&\ \forall y\ \neg P(y)$
$\phi_{02} = \exists x \forall y\ P(x)\ \&\ \neg P(y)$
$\phi_1 = \forall y\ P(c)\ \&\ \neg P(y)$

$S = \{P(c), \neg P(y)\}$

$D_1 = P(c)$
$D_2 = \neg P(y)$
$D_3\ \ \underset{\{y/c\}}{\overset{D_1,D_2}{=}}\ \ \square$

2. $\exists x \forall y R(x,y)\ \rightarrow\ \forall y \exists x R(x,y)$
$\phi_0 = \neg(\exists x_1 \forall y_1 R(x_1,y_1)\ \rightarrow\ \forall y_2 \exists x_2 R(x_2,y_2))$
$\phi_{01} = \exists x_1 \forall y_1 R(x_1,y_1)\ \&\ \exists y_2 \forall x_2 \neg R(x_2,y_2)$
$\phi_{02} = \exists x_1 \forall y_1 \exists y_2 \forall x_2\ R(x_1,y_1)\ \&\ \neg R(x_2,y_2)$
$\phi_1 = \forall y_1 \forall x_2\ R(c,y_1)\ \&\ \neg R(x_2, f(y_1))$
$S = \{R(c,y_1), \neg R(x_2, f(y_1))\}$

$D_1 = R(c,y_1)$
$D_2 = \neg R(x_2, f(y_2))$ *переименование переменных*
$D_3\ \ \underset{\{x_2/c, y_1/f(y_2)\}}{\overset{D_1,D_2}{=}}\ \ \square$

3. $\forall x(P(x)\ \rightarrow\ \exists y\ R(x,f(y)))\ \rightarrow\ (\exists x\ \neg P(x)\ \vee\ \forall x \exists z R(x,z))$

$\phi_0 = \neg(\forall x_1(P(x_1)\ \rightarrow\ \exists y_1\ R(x_{,1} f(y_1)))\ \rightarrow\ (\exists x_2\ \neg P(x_2)\ \vee\ \forall x_3 \exists z_1 R(x_3,z_1)))$
$\phi_{01} = \forall x_1(\neg P(x_1)\ \vee\ \exists y_1\ R(x_1,f(y_1)))\ \&\ \forall x_2\ P(x_2)\ \&\ \exists x_3 \forall z_1 \neg R(x_3,z_1)$
$\phi_{02} = \forall x_1 \exists y_1 \forall x_2 \exists x_3 \forall z_1 (\neg P(x_1)\ \vee\ R(x_1,f(y_1)))\ \&\ P(x_2)\ \&\ \neg R(x_3,z_1)$
$\phi_1 = \forall x_1 \forall x_2 \forall z_1 (\neg P(x_1)\ \vee\ R(x_1,f(g(x_1))))\ \&\ P(x_2)\ \&\ \neg R(h(x_1,x_2),z_1)$
$S = \{\neg P(x_1)\ \vee\ R(x_1,f(g(x_1))), P(x_2), \neg R(h(x_1,x_2),z_1)\}$

$D_1 = \neg P(x_1)\ \vee\ R(x_1,f(g(x_1)))$
$D_2 = P(x_2)$
$D_3 = \neg R(h(x_{31},x_{32}),z_3)$

$D_4\ \ \underset{\{x_1/x_2\}}{\overset{D_1,D_2}{=}}\ \ R(x_4,f(g(x_4))$

$D_5\ \ \underset{\{x_4/h(x_{31},x_{32}), z_3/f(g(h(x_{31},x_{32})))\}}{\overset{D_3,D_4}{=}}\ \ \square$

(2013) ③

$$\varphi = \exists y_1 (\forall x_1 P(y_1, f(x_1)) \to \forall x_2 R(x_2)) \to \forall x_3 (\neg \exists y_2 P(y_2, f(x_3)) \vee R(x_3))$$

$$\varphi_0 = \neg(\varphi) =$$

$$= \neg(\neg \exists y_1 (\neg \forall x_1 P(y_1, f(x_1)) \vee \forall x_2 R(x_2)) \vee \forall x_3 (\neg \exists y_2 P(y_2, f(x_3)) \vee R(x_3))) =$$

$$= \exists y_1 (\exists x_1 \neg P(y_1, f(x_1)) \vee \forall x_2 R(x_2)) \,\&\, \exists x_3 (\exists y_2 P(y_2, f(x_3)) \,\&\, \neg R(x_3)) =$$

$$= \underset{c_1}{\exists y_1}\, \underset{c_2}{\exists x_1}\, \forall x_2\, \underset{a(x_2)}{\exists x_3}\, \underset{b(x_2)}{\exists y_2} ((\neg P(y_1, f(x_1)) \vee R(x_2)) \,\&\, P(y_2, f(x_3)) \,\&\, \neg R(x_3)) =$$

$$= \forall x_2 (\underbrace{(\neg P(c_1, f(c_2)) \vee R(x_2))}_{D_1} \,\&\, \underbrace{P(b(x_2), f(a(x_2)))}_{D_2} \,\&\, \neg \underbrace{R(a(x_2))}_{D_3})$$

$D_1 = \neg P(c_{11}, f(c_{12})) \vee R(x_1)$. $\qquad D_4 = \neg P(c_{41}, f(c_{42}))$

$D_2 = P(b(x_2), f(a(x_2)))$

$D_3 = \neg R(a(x_3))$

D_1, D_2 → D_4: $\begin{cases} c_{11} = b(x_2) \\ f(c_{12}) = f(a(x_2)) \end{cases}$ нет унификатора

D_1, D_3 → D_4: $\{ x_1 = a(x_3)$

D_2, D_4 → $\cancel{\square}$: $\begin{cases} c_{41} = b(x_2) \\ f(c_{42}) = f(a(x_2)) \end{cases}$ нет унификатора

Формула не общезначимая

(2013: 2) $\langle \varnothing \mid \exists x(\exists y \neg A(x,y) \to \forall x B(x)) \to \forall y (B(y) \vee \exists y A(y, f(y))) \rangle$

$\downarrow R\to,\ L\exists,\ R\forall,\ R\vee$

$\langle \exists y \neg A(c_1, y) \to \forall x B(x) \mid B(c_2), \underbrace{\exists y A(y, f(y))}_{\varphi_1} \rangle$

$\downarrow L\to$

$\langle \forall x B(x) \mid B(c_2), \varphi_1 \rangle$

$\downarrow L\forall$

$\langle B(c_2), \forall x B(x) \mid B(c_2), \varphi_1 \rangle$

закрытая табл.

$\langle \varnothing \mid \exists y \neg A(c_1, y), B(c_2), \exists y A(y, f(y)) \rangle$

$\downarrow R\exists_{y/f(c_1)},\ R\exists_{y/c_1},\ R\neg$

$\langle A(c_1, f(c_1)) \mid A(c_1, f(c_1)), B(c_2), \exists y \neg A(c_1, y), \varphi_1 \rangle$

закрытая таблица

2013:4

$$
\begin{array}{lll}
P: A(g(Y), X) & \leftarrow R(X), !, B(Y); & (1)\\
A(g(Y), c) & \leftarrow B(Y), not(R(f(Y))); & (2)\\
R(f(X)) & \leftarrow B(X), !, A(X, g(X)); & (3)\\
R(X) & \leftarrow ; & (4)\\
B(b) & \leftarrow ; & (5)
\end{array}
$$

(* $?A(X,Y), not(A(X,X))$

$\xrightarrow{(1)\ \{X/g(Y_1),\ Y/X_1\}}$

(*$_2$ $?R(X_1), !_2, B(Y_1), not(A(g(Y_1), g(Y_1)))$

$\xrightarrow{(3)\ \{X_1/f(X_2)\}}$ $?B(X_2), !, A(X_2, g(X_2)), !\ B(Y_1), not(A(g(Y_1), g(Y_1)))$

$\xrightarrow{(5)\ \{X_2/b\}}$ $?!, A(b, g(b)), !\ B(Y_1), not(A(g(Y_1), g(Y_1)))$ *$_2$)

$\downarrow$ $?A(b, g(b)), !, B(Y_1), not(A(g(Y_1), g(Y_1)))$

$\downarrow$ fail

$\xrightarrow{(2)\ \{X/g(Y_2),\ Y/c\}}$ $?B(Y_2), not(R(f(Y_2))), not(A(g(Y_2), g(Y_2)))$

$\xrightarrow{(5)\ \{Y_2/b\}}$ $?not(R(f(b))), not(A(g(b), g(b)))$

$\downarrow$ $?not(A(g(b), g(b)))$

$\downarrow$ $\square$ $\underline{X = g(b),\ Y = c}$

(* $?R(f(b))$

$\xrightarrow{(3)\ \{X_3/b\}}$ $?B(b), !, A(b, g(b))$

$\xrightarrow{(5)}$ $?!, A(b, g(b))$ *)

$\downarrow$ $?A(b, g(b))$

$\downarrow$ fail

(* $?A(g(b), g(b))$ $\xrightarrow{(2)}$ fail

$\xrightarrow{(1)\ \{Y_1/b,\ X_1/g(b)\}}$

(*$_2$ $?R(g(b)), !\ B(b)$

$\xrightarrow{(3)\ \{X_3/b\}}$ $?B(b), !_2, A(b, g(b)), !\ B(b)$

$\xrightarrow{(5)}$ $?!_2, A(b, g(b)), !, B(b)$ *$_2$)

$\downarrow$ $?A(b, g(b)), !, B(b)$

$\downarrow$ fail